第 3 节 双曲线渐近线相关问题（★★★）

强化训练

1．（2023·北京模拟·★★）已知双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的一个焦点为$(\sqrt{5},0)$，且与直线$y=\pm 2x$没有公共点，则双曲线的方程可以为_____.（填一个满足要求的双曲线方程即可）

答案：$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$（答案不唯一，详见解析）

解析：由于只需填一个双曲线，故最简单的做法是让$y=\pm 2x$就是渐近线，可由此建立方程组求出a和b，

若$y=\pm 2x$为双曲线的渐近线，则$\dfrac{b}{a}=2$，所以$b=2a$ ①，

又双曲线的一个焦点是$(\sqrt{5},0)$，所以$a^2+b^2=5$ ②，

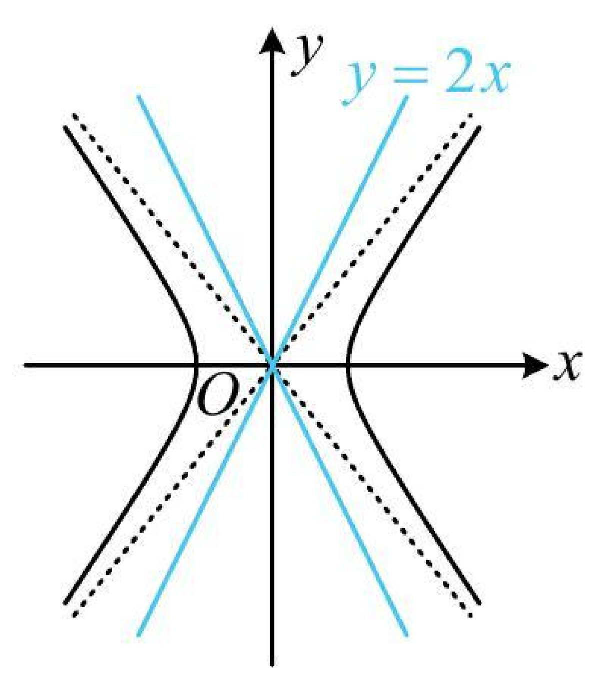
联立①②解得：$\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$，故双曲线的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$；

若要求出全部满足要求的双曲线，可由给的焦点设出双曲线的方程，

由题意，可设双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{m}-\dfrac{y^2}{5-m}=1(0<m<5)$，则其渐近线为$y=\pm\dfrac{\sqrt{5-m}}{\sqrt{m}}x$，

要使双曲线与直线$y=\pm 2x$没有交点，如图，应有$\dfrac{\sqrt{5-m}}{\sqrt{m}}\le 2$，解得：$m\ge 1$，结合$0<m<5$可得$1\le m<5$，

在此范围内任取一个m，得到的双曲线均满足题意.



2．（2023·重庆二模·★★）已知点$P(1,2)$和双曲线$C:x^2-\dfrac{y^2}{4}=1$，过点P且与双曲线C只有 1 个公共点的直线有（　　）

（A）2 条　（B）3 条　（C）4 条　（D）无数条

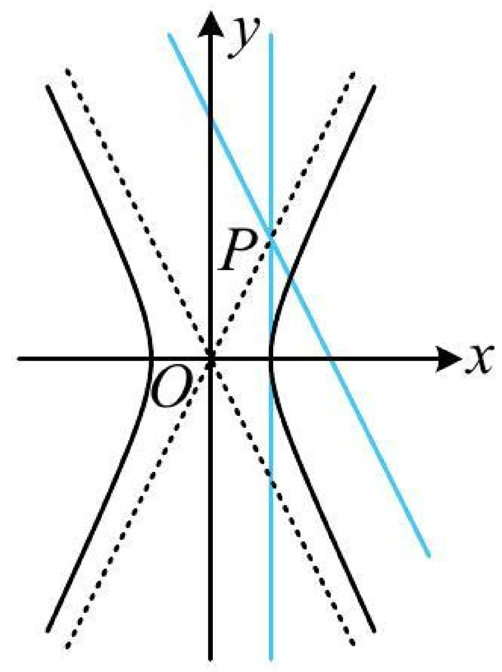
答案：A

解析：分析直线与双曲线的交点，可画图结合渐近线来看，

双曲线的渐近线为$y=\pm 2x$，注意到点$P(1,2)$在其中一条渐近线$y=2x$上，如图，

我们可以让直线从竖直线出发，绕P旋转180°，就能看出满足要求的直线有几条了，

由图可知过 P 且与双曲线 C 只有 1 个公共点的直线有 2 条，其中一条是切线$x=1$，另一条是与渐近线$y=-2x$平行的直线.



3．（2022 • 江苏南京模拟 • ★★）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则此双曲线的离心率为_____.

答案： $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 2

解析： 双曲线的渐近线为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，它们的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 有如图 1 和图 2 所示的两种情况，下面分别考虑，

若为图 1，则 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\dfrac{b}{a}=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，从而 $a=\sqrt{3}b$，故 $a^2=3b^2=3c^2-3a^2$，

整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{4}{3}$，所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$；

若为图 2，则 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\dfrac{b}{a}=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$，从而 $b=\sqrt{3}a$，故 $b^2=c^2-a^2=3a^2$，

整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=4$，所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=2$.

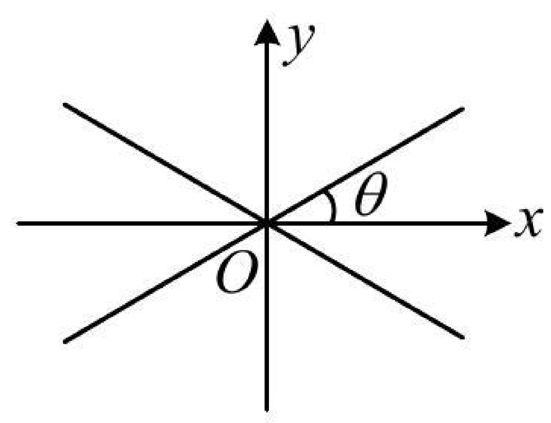


图1

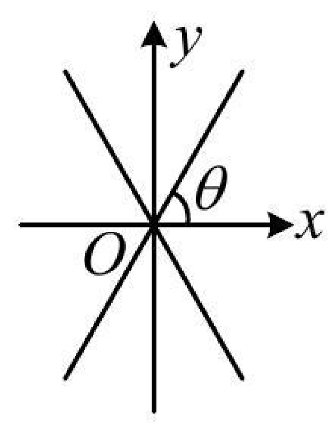


图2

【反思】两相交直线的夹角指的是它们形成的两对对顶角中较小的那一对.

4．（2022 • 江苏南京模拟 • ★★）椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 与双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率之积为 1，则 C_2 的两条渐近线的倾斜角分别为（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{6}$，$-\dfrac{\pi}{6}$　　（B）$\dfrac{\pi}{3}$，$-\dfrac{\pi}{3}$　　（C）$\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5\pi}{6}$　　（D）$\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2\pi}{3}$

答案： D

解析： 先求渐近线斜率，可通过离心率之积为 1 来寻找 a 和 b 的关系，

椭圆 C_1 的离心率 $e_1=\dfrac{\sqrt{4-3}}{2}=\dfrac{1}{2}$，双曲线 C_2 的离心率 $e_2=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$，由题意，$e_1e_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=1$，

化简得：$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，所以 C_2 的渐近线斜率分别为 $\sqrt{3}$ 和 $-\sqrt{3}$，故其倾斜角分别为 $\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{2\pi}{3}$.

5．（2020·新课标Ⅱ卷·★★★）设 O 为坐标原点，直线 $x=a$ 与双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线分别交于 D，E 两点，若 ΔODE 的面积为 8，则 C 的焦距的最小值为（　　）

（A）4　（B）8　（C）16　（D）32

答案：B

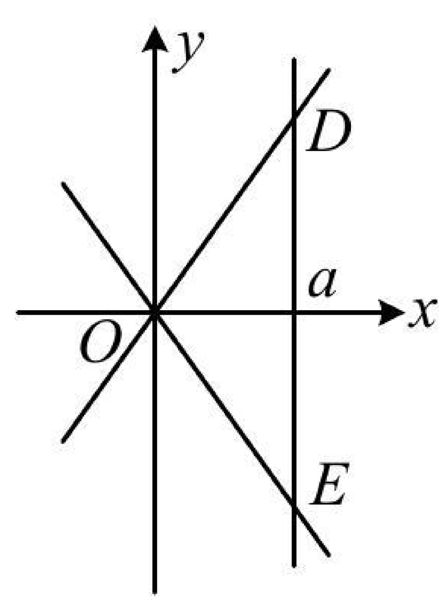
解析：由题意，双曲线 C 的焦距 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}$ ①，

要求最值，得先找 a，b 的关系，给了 $S_{\Delta ODE}$，如图，可通过联立方程求 D，E 坐标来算底边 $|DE|$，高即为 a，

联立 $\begin{cases}x=a\\ y=\pm\frac{b}{a}x\end{cases}$ 解得：$y=\pm b$，所以 $|DE|=2b$，$S_{\Delta ODE}=\frac{1}{2}|DE|\cdot a=ab$，由题意，$S_{\Delta ODE}=8$，故 $ab=8$，

在此条件下求①的最小值，可用不等式 $a^2+b^2\ge 2ab$，

由①可得 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}\ge 2\sqrt{2ab}=8$，当且仅当 $a=b=2\sqrt{2}$ 时取等号，所以焦距的最小值为 8.



6．（2022·广东珠海模拟·★★★）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 A 在 C 的过第二、四象限的渐近线 l 上，且 $AF_2\perp l$，若 $|BF_2|-|BF_1|=2a$，$\overrightarrow{F_2B}+2\overrightarrow{BA}=\vec{0}$，则 C 的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　（B）$\sqrt{5}$　（C）$\sqrt{6}$　（D）$2\sqrt{2}$

答案：B

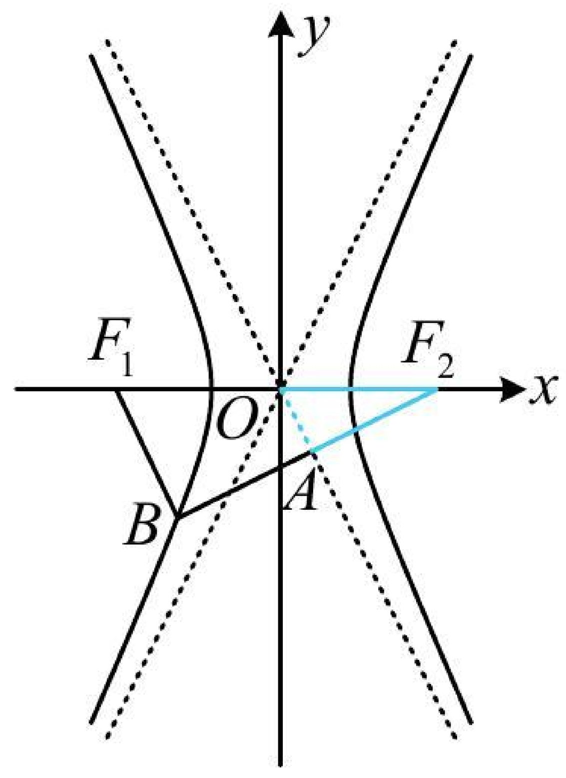
解析：由 $\overrightarrow{F_2B}+2\overrightarrow{BA}=\vec{0}$ 可得 $\overrightarrow{BF_2}=2\overrightarrow{BA}$，所以 A 为 BF_2 的中点，

如图，ΔAOF_2 是 C 的一个特征三角形，结合 A 为中点，可构造中位线，计算 $|BF_1|$ 和 $|BF_2|$，

在 ΔAOF_2 中，$|AF_2|=b$，$|OA|=a$，因为 O 是 F_1F_2 的中点，所以 $|BF_1|=2|OA|=2a$，$|BF_2|=2|AF_2|=2b$，

代入题干的 $|BF_2|-|BF_1|=2a$ 可得 $2b-2a=2a$，所以 $b=2a$，故 $b^2=c^2-a^2=4a^2$，

整理得：$\frac{c^2}{a^2}=5$，所以 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$.



7.（2023 •福建统考 •★★★）已知双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为$\sqrt{5}$，左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$F_2$关于$C$的一条渐近线的对称点为$P$，若$|PF_1|=2$，则$\Delta PF_1F_2$的面积为（　　）

（A）2　（B）$\sqrt{5}$　（C）3　（D）4

答案：D

解析：给了离心率，可建立a，b，c的比值关系，找到渐近线斜率，

离心率$e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{5}\Rightarrow c=\sqrt{5}a\Rightarrow c^2=5a^2\Rightarrow a^2+b^2=5a^2$，所以$b=2a$，故双曲线$C$的渐近线为$y=\pm 2x$，

条件中有点关于直线对称，于是有中点和垂直两层关系，先由它出发分析图形的几何性质，

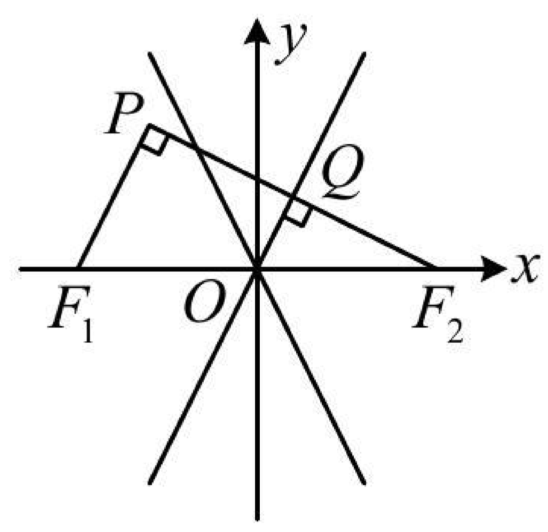
如图，不妨设F_2和P关于渐近线$y=2x$对称，则图中Q为PF_2中点，且$OQ\perp PF_2$，

又O为F_1F_2的中点，所以$OQ /\!/ PF_1$，故$PF_1\perp PF_2$，

给了$|PF_1|$，算$S_{\Delta PF_1F_2}$还差$|PF_2|$，注意到ΔOQF_2是一个特征三角形，且已求得其三边的比值，故由$|PF_1|$先求$|OQ|$，就能求得$|QF_2|$，从而得到$|PF_2|$，

由前面的分析过程可知$|OQ|=\dfrac{1}{2}|PF_1|=1$，在$\Delta QOF_2$中，$|QF_2|=|OQ|\cdot\tan\angle QOF_2=2|OQ|=2$，

所以$|PF_2|=2|QF_2|=4$，故$S_{\Delta PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\dfrac{1}{2}\times 2\times 4=4$.



8.（2022 • 江西南昌模拟 • ★★★）双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，在$C$的渐近线上存在一点$M$，使$\angle OMF_2=90^\circ$，且$M$在第一象限，若$|MF_1|=3|MF_2|$，则$C$的离心率为_____.

答案：$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

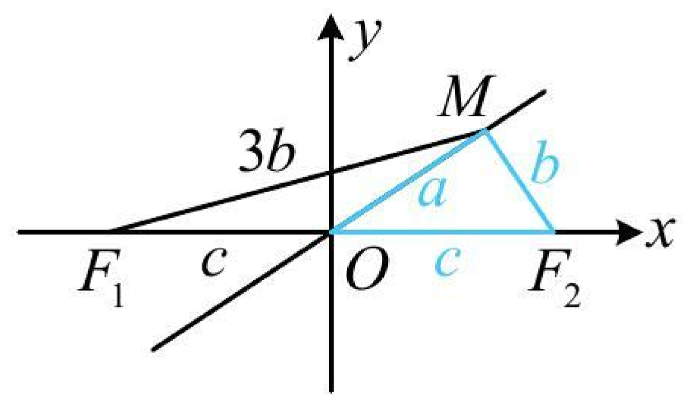
解析：如图，ΔMOF_2是C的特征三角形，可由它的三边结合已知条件计算$|MF_1|$，每边都用a，b，c表示后，可用双余弦法构造方程求离心率，

由题意，$|OM|=a$，$|MF_2|=b$，$|MF_1|=3|MF_2|=3b$，$|OF_1|=|OF_2|=c$，

由图可知 $\cos\angle MOF_2=\dfrac{|OM|}{|OF_2|}=\dfrac{a}{c}$， $\cos\angle MOF_1=\dfrac{|OM|^2+|OF_1|^2-|MF_1|^2}{2|OM|\cdot|OF_1|}=\dfrac{a^2+c^2-9b^2}{2ac}$，

因为 $\angle MOF_2=\pi-\angle MOF_1$，所以 $\cos\angle MOF_2=\cos(\pi-\angle MOF_1)=-\cos\angle MOF_1$，故 $\dfrac{a}{c}=-\dfrac{a^2+c^2-9b^2}{2ac}$，

整理得：$3a^2+c^2-9b^2=0$，所以 $3a^2+c^2-9(c^2-a^2)=0$，从而 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{3}{2}$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



9.（★★★）双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右焦点为 F，过 F 作一条渐近线的垂线 l，垂足为 M，若 l 与另一条渐近线的交点是 N，且 $\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{MF}$，则 C 的离心率为_____.

答案：$\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

解法 1：如图，ΔMOF 是 C 的特征三角形，先结合角平分线性质定理和 $\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{MF}$ 求其它线段的长，

由题意，$|MF|=b$，$|OM|=a$，因为 $\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{MF}$，所以 $|MN|=5b$，$|FN|=4b$，

由渐近线的对称性，OF 是 $\angle MON$ 的平分线，所以 $\dfrac{|OM|}{|ON|}=\dfrac{|MF|}{|FN|}=\dfrac{1}{4}$，故 $|ON|=4|OM|=4a$，

接下来可利用 $OM\perp MN$，由勾股定理建立方程求离心率，

在 ΔMON 中，$|OM|^2+|MN|^2=|ON|^2$，所以 $a^2+25b^2=16a^2$，整理得：$3a^2=5b^2$，

所以 $3a^2=5c^2-5a^2$，从而 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{8}{5}$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

解法 2：由题意，$|MF|=b$，$|OM|=a$，因为 $\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{MF}$，所以 $|MN|=5b$，

接下来也可抓住 $\angle MON=2\angle MOF$，利用二倍角公式来建立方程求离心率，

记 $\angle MOF=\theta$，则 $\angle MON=2\theta$，由图可知 $\tan\theta=\dfrac{|MF|}{|OM|}=\dfrac{b}{a}$， $\tan 2\theta=\dfrac{|MN|}{|OM|}=\dfrac{5b}{a}$，

因为 $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$，所以 $\dfrac{5b}{a}=\dfrac{2\cdot\dfrac{b}{a}}{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$，整理得：$3a^2=5b^2$，所以 $3a^2=5c^2-5a^2$，

整理得：$\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{8}{5}$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

解法 3：由 $MN\perp$ 一条渐近线可写出直线 MN 的方程，与两渐近线联立求 M，N 的坐标，将 $\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{MF}$ 翻译成坐标关系建立方程求离心率，

如图，$F(c,0)$，渐近线 OM、ON 的方程分别为 $y=\dfrac{b}{a}x$，$y=-\dfrac{b}{a}x$，

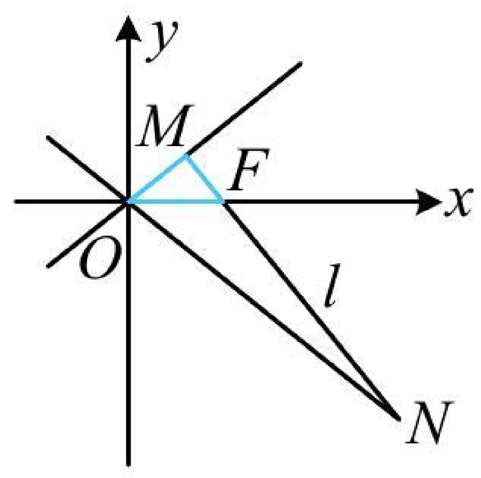
因为 $l\perp OM$，所以 l 的方程为 $y=-\dfrac{a}{b}(x-c)$，联立 $\begin{cases}y=-\dfrac{a}{b}(x-c)\\ y=\dfrac{b}{a}x\end{cases}$ 解得：$y=\dfrac{ab}{c}$，即 $y_M=\dfrac{ab}{c}$ ①，

联立 $\begin{cases}y=-\dfrac{a}{b}(x-c)\\ y=-\dfrac{b}{a}x\end{cases}$ 解得：$y=-\dfrac{abc}{a^2-b^2}$，即 $y_N=-\dfrac{abc}{a^2-b^2}$ ②，

因为 $\overrightarrow{MN}=5\overrightarrow{MF}$，所以 $\overrightarrow{FN}=4\overrightarrow{MF}$，而 $\overrightarrow{FN}=(x_N-c,y_N)$，$\overrightarrow{MF}=(c-x_M,-y_M)$，所以 $y_N=-4y_M$ ③，

将①②代入③可得 $-\dfrac{abc}{a^2-b^2}=-4\cdot\dfrac{ab}{c}$，整理得：$c^2=4a^2-4b^2$，所以 $c^2=4a^2-4(c^2-a^2)$，

从而 $5c^2=8a^2$，故 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{8}{5}$，所以离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.



【反思】在双曲线的渐近线有关问题中，利用渐近线与其它直线或曲线联立求交点，往往计算量较大，可作为次选方案，首选分析几何关系求解.

10.（2022•河南新安模拟•★★★）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线与圆 $A:(x-a)^2+y^2=b^2$ 交于 P，Q 两点，O 为原点，若 Q 为 OP 中点，则 C 的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\sqrt{3}$

答案：C

解析：先画出图形，尝试通过分析图形的几何特征来建立方程求离心率，

如图，$|AP|=|AQ|=b$，$|OA|=a$，注意到 $\tan\angle POA=\dfrac{b}{a}=\dfrac{|PA|}{|OA|}$，结合图形可得 $PA\perp OA$，

又 Q 为 OP 的中点，所以 $|OP|=2|AQ|=2b$，接下来只需在 ΔPOA 中用勾股定理即可建立方程求离心率，

由 $|OA|^2+|PA|^2=|OP|^2$ 可得 $a^2+b^2=4b^2$，所以 $a^2=3b^2=3c^2-3a^2$，从而 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{4}{3}$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.